

Théorie du producteur

Isoquantes, TMST et optimisation

Minimisation du coût • Lagrangien • Maximisation du profit

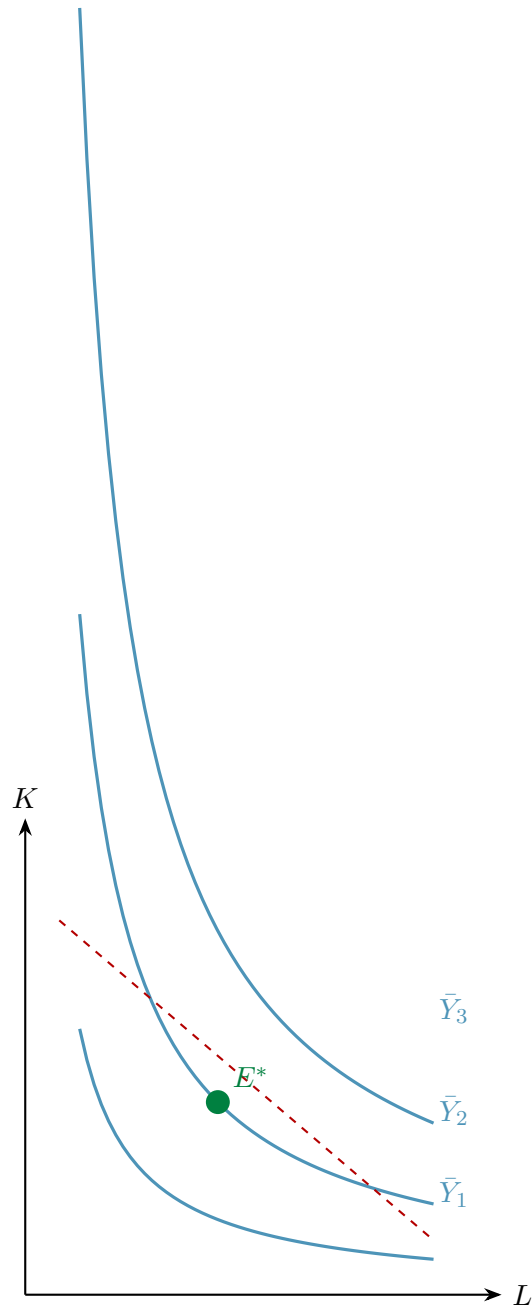


Table des matières

1	La fonction de production	3
1.1	Définition générale	3
1.2	La fonction Cobb-Douglas	3
1.3	Les productivités marginales	3
2	Les isoquantes	5
2.1	Définition	5
2.2	Équation de l'isoquante (Cobb-Douglas)	5
2.3	Représentation graphique	5
2.4	Propriétés des isoquantes	5
2.5	Interprétation économique des points A, B, C	6
3	Le Taux Marginal de Substitution Technique (TMST)	7
3.1	Définition	7
3.2	Calcul du TMST	7
3.3	TMST pour une fonction Cobb-Douglas	7
3.4	Représentation graphique du TMST	8
3.5	Loi du TMST décroissant	8
4	La droite d'isocoût	9
4.1	Le coût total de production	9
4.2	La droite d'isocoût	9
4.3	Représentation graphique	10
5	Minimisation du coût : résolution par le Lagrangien	11
5.1	Le problème d'optimisation	11
5.2	Écriture du Lagrangien	11
5.3	Conditions du premier ordre (CPO)	11
5.4	Résolution : deux méthodes	12
5.5	Interprétation économique de la condition d'optimalité	14
5.6	Représentation graphique de l'optimum	14
6	Application numérique complète	15
7	La fonction de coût	16
7.1	Du choix optimal à la fonction de coût	16
7.2	Fonction de coût pour Cobb-Douglas	16
8	Maximisation du profit	17
8.1	Le problème en deux étapes	17
8.2	Le programme de maximisation	17
8.3	Condition du premier ordre	17
8.4	Condition du second ordre	17
8.5	Représentation graphique	18
8.6	Résumé : la logique complète de l'optimisation	19
8.7	Les conditions d'optimalité en résumé	19
9	Exercice récapitulatif	20

1 La fonction de production

1.1 Définition générale

Définition

La **fonction de production** $F(L, K)$ décrit la quantité maximale de bien Y qu'une entreprise peut produire en combinant une quantité de travail L et de capital K :

$$Y = F(L, K)$$

1.2 La fonction Cobb-Douglas

La forme fonctionnelle la plus utilisée en économie est la fonction **Cobb-Douglas** :

$$Y = AL^\alpha K^\beta$$

où :

- $A > 0$: **productivité globale des facteurs** (efficacité technologique)
- $\alpha > 0$: **élasticité de la production par rapport au travail**
- $\beta > 0$: **élasticité de la production par rapport au capital**

Rendements d'échelle

La somme $\alpha + \beta$ détermine les **rendements d'échelle** :

- $\alpha + \beta = 1$: rendements d'échelle **constants** (cas le plus fréquent)
- $\alpha + \beta > 1$: rendements d'échelle **croissants**
- $\alpha + \beta < 1$: rendements d'échelle **décroissants**

Dans la suite, on suppose $\alpha + \beta = 1$, soit $\beta = 1 - \alpha$.

1.3 Les productivités marginales

Définition

La **productivité marginale** d'un facteur mesure l'augmentation de la production lorsqu'on utilise une unité supplémentaire de ce facteur, les autres facteurs restant constants.

Pour $Y = AL^\alpha K^{1-\alpha}$:

Productivité marginale du travail :

$$Pm_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = \alpha \cdot \frac{Y}{L}$$

Productivité marginale du capital :

$$Pm_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = (1 - \alpha) AL^\alpha K^{-\alpha} = (1 - \alpha) \cdot \frac{Y}{K}$$

Remarque importante

Les productivités marginales sont **positives** ($Pm_L > 0$, $Pm_K > 0$) et **décroissantes** :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \alpha(\alpha - 1)AL^{\alpha-2}K^{1-\alpha} < 0 \quad \text{car } \alpha < 1$$

C'est la **loi des rendements décroissants** : chaque unité supplémentaire d'un facteur apporte un gain de production de plus en plus faible.

2 Les isoquantes

2.1 Définition

Définition

Une **isoquante** (ou courbe d'iso-produit) est l'ensemble des combinaisons de facteurs (L, K) permettant de produire un même niveau de production \bar{Y} :

$$\mathcal{I}_{\bar{Y}} = \{(L, K) \in \mathbb{R}_+^2 \mid F(L, K) = \bar{Y}\}$$

2.2 Équation de l'isoquante (Cobb-Douglas)

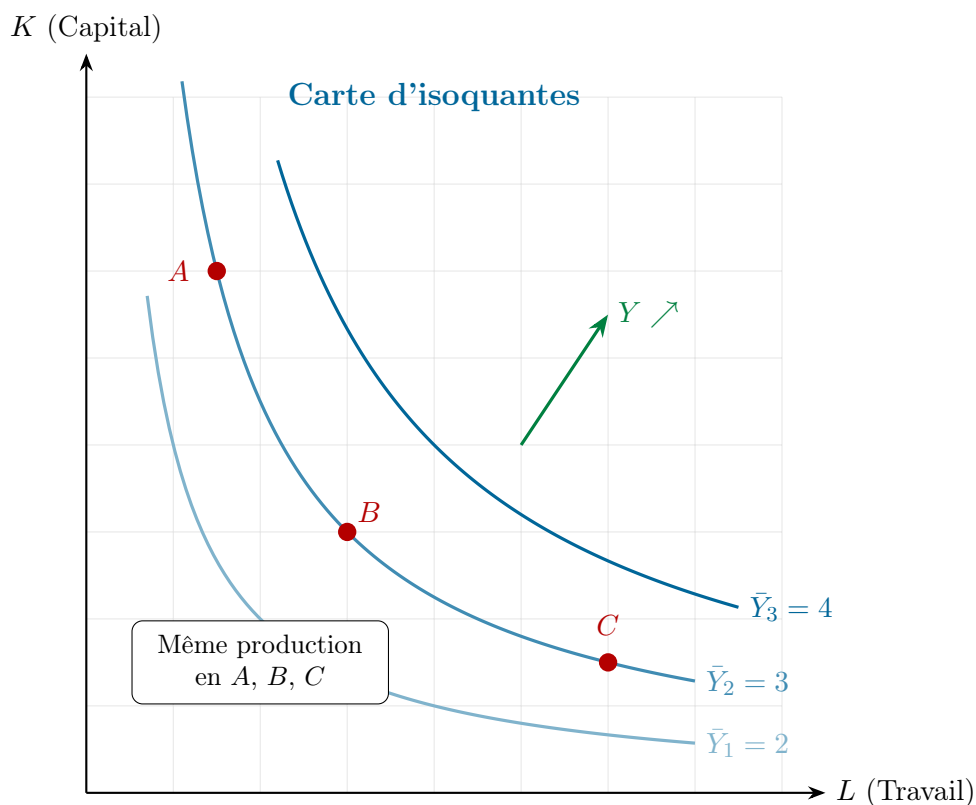
Pour $Y = AL^\alpha K^{1-\alpha}$, l'isoquante de niveau \bar{Y} s'écrit :

$$AL^\alpha K^{1-\alpha} = \bar{Y}$$

En isolant K :

$$K^{1-\alpha} = \frac{\bar{Y}}{AL^\alpha} \Rightarrow K = \left(\frac{\bar{Y}}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

2.3 Représentation graphique



2.4 Propriétés des isoquantes

1. **Décroissantes** : si on utilise moins de capital, il faut plus de travail pour produire autant

$$\left. \frac{dK}{dL} \right|_{\bar{Y}} < 0$$

2. **Convexes** (vers l'origine) : la substitution devient de plus en plus difficile
3. **Ne se croisent jamais** : sinon une même combinaison (L, K) produirait deux niveaux différents
4. **Plus on s'éloigne de l'origine**, plus la production est élevée

2.5 Interprétation économique des points A, B, C

Point	Capital K	Travail L	Type de production
A	Élevé	Faible	Intensive en capital (automatisée)
B	Moyen	Moyen	Équilibrée
C	Faible	Élevé	Intensive en travail (artisanale)

Les trois points produisent la **même quantité** \bar{Y}_2 , mais avec des techniques différentes. Le choix dépendra des **prix relatifs** des facteurs.

3 Le Taux Marginal de Substitution Technique (TMST)

3.1 Définition

Définition

Le **Taux Marginal de Substitution Technique** (TMST) du capital au travail mesure la quantité de capital que l'entreprise peut **économiser** en utilisant une unité **supplémentaire** de travail, tout en maintenant sa production constante :

$$TMST_{L,K} = - \left. \frac{dK}{dL} \right|_{Y=\bar{Y}}$$

3.2 Calcul du TMST

Le long d'une isoquante, la production est constante, donc $dY = 0$.

En différentiant totalement $Y = F(L, K)$:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial L} dL + \frac{\partial F}{\partial K} dK = Pm_L \cdot dL + Pm_K \cdot dK = 0$$

En isolant $\frac{dK}{dL}$:

$$Pm_K \cdot dK = -Pm_L \cdot dL \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dL} = - \frac{Pm_L}{Pm_K}$$

D'où :

$$TMST_{L,K} = - \left. \frac{dK}{dL} \right|_{\bar{Y}} = \frac{Pm_L}{Pm_K}$$

Remarque importante

Le TMST est égal au **rapport des productivités marginales**. C'est la pente (en valeur absolue) de l'isoquante en un point donné.

3.3 TMST pour une fonction Cobb-Douglas

Pour $Y = AL^\alpha K^{1-\alpha}$:

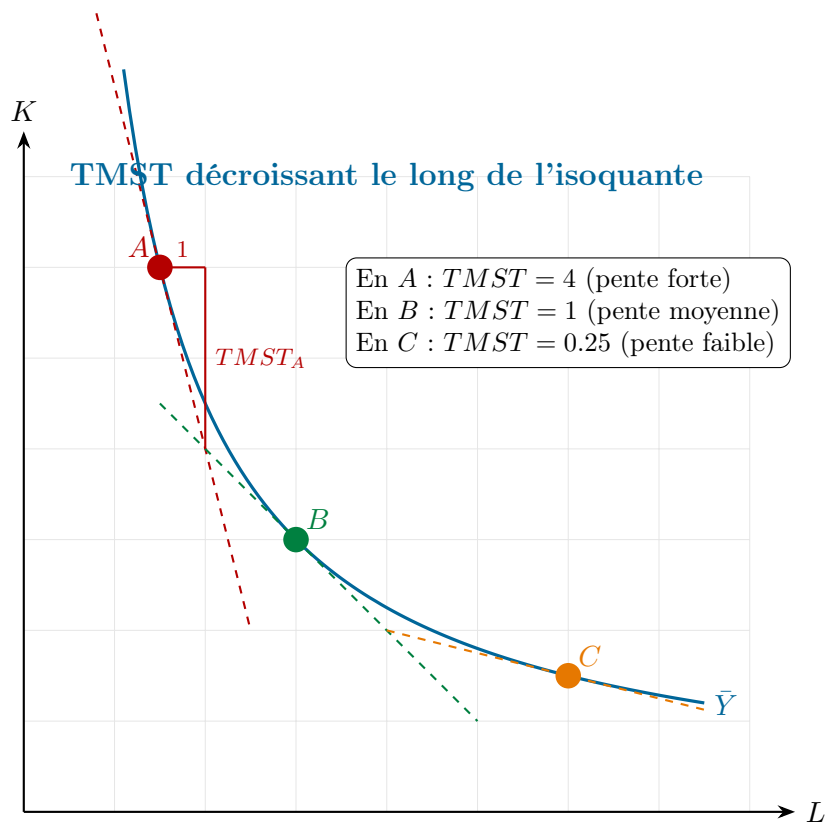
$$TMST_{L,K} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{\alpha AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha}}{(1-\alpha) AL^\alpha K^{-\alpha}}$$

Simplifions :

$$TMST_{L,K} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha}}{AL^\alpha K^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{K^{1-\alpha} \cdot K^\alpha}{L^\alpha \cdot L^{1-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{K}{L}$$

$$TMST_{L,K} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{K}{L}$$

3.4 Représentation graphique du TMST



3.5 Loi du TMST décroissant

Loi du TMST décroissant

Le TMST est **décroissant** le long d'une isoquante lorsqu'on substitue du travail au capital (déplacement de A vers C).

Interprétation économique :

- **En A** (peu de L , beaucoup de K) : le travail est rare, donc très productif. Une unité de travail supplémentaire permet d'économiser beaucoup de capital \Rightarrow $TMST$ élevé.
- **En C** (beaucoup de L , peu de K) : le travail est abondant, donc peu productif. Une unité de travail supplémentaire permet d'économiser peu de capital \Rightarrow $TMST$ faible.

Cette propriété traduit la **difficulté croissante** de substituer un facteur à l'autre lorsque celui-ci devient rare.

4 La droite d'isocoût

4.1 Le coût total de production

Définition

Le **coût total** de l'entreprise pour utiliser L unités de travail et K unités de capital est :

$$CT = wL + rK$$

où :

- w : **salaire** (prix d'une unité de travail)
- r : **taux de rendement du capital** (coût d'usage d'une unité de capital)

4.2 La droite d'isocoût

Définition

La **droite d'isocoût** représente l'ensemble des combinaisons (L, K) ayant le même coût total \bar{C} :

$$wL + rK = \bar{C}$$

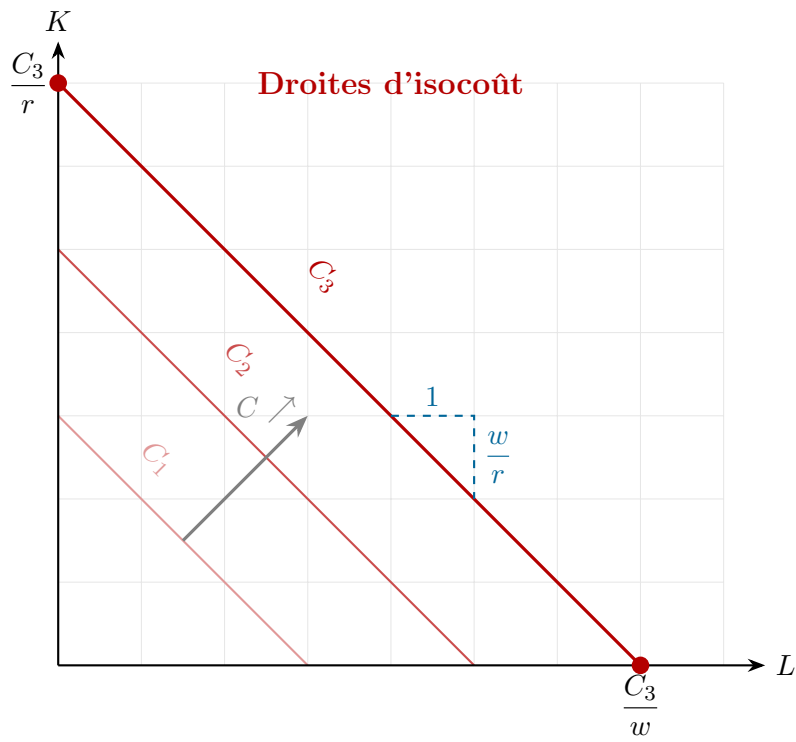
Sous forme explicite :

$$K = \frac{\bar{C}}{r} - \frac{w}{r}L$$

Propriétés :

- **Ordonnée à l'origine** : $\frac{\bar{C}}{r}$ (si on n'utilise que du capital)
- **Abscisse à l'origine** : $\frac{\bar{C}}{w}$ (si on n'utilise que du travail)
- **Pente** : $-\frac{w}{r}$ (prix relatif du travail par rapport au capital)

4.3 Représentation graphique



5 Minimisation du coût : résolution par le Lagrangien

5.1 Le problème d'optimisation

L'entreprise souhaite produire une quantité donnée \bar{Y} au **coût minimum**. Le programme s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \min_{L,K} & CT = wL + rK \\ \text{s.c.} & F(L, K) = \bar{Y} \end{array}$$

5.2 Écriture du Lagrangien

Le Lagrangien associé à ce problème est :

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = wL + rK - \lambda [F(L, K) - \bar{Y}]$$

où λ est le **multiplicateur de Lagrange**.

Remarque importante

Le multiplicateur λ s'interprète comme le **coût marginal** : c'est l'augmentation du coût minimum lorsque la production cible augmente d'une unité.

5.3 Conditions du premier ordre (CPO)

On dérive le Lagrangien par rapport à chaque variable et on égalise à zéro :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \quad \Rightarrow \quad w - \lambda \frac{\partial F}{\partial L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w = \lambda \cdot Pm_L} \quad (\text{CPO 1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \quad \Rightarrow \quad r - \lambda \frac{\partial F}{\partial K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \lambda \cdot Pm_K} \quad (\text{CPO 2})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(L, K) = \bar{Y}} \quad (\text{Contrainte})$$

5.4 Résolution : deux méthodes

Nous avons un système de 3 équations à 3 inconnues (L^* , K^* , λ^*). Voyons deux façons de le résoudre.

Méthode 1 : Résolution directe (longue et fastidieuse)

On isole λ dans chaque CPO puis on remplace dans la contrainte.

Étape 1 : Exprimer λ depuis les CPO

$$\text{De (CPO 1) : } \lambda = \frac{w}{Pm_L}$$

$$\text{De (CPO 2) : } \lambda = \frac{r}{Pm_K}$$

Étape 2 : Exprimer K en fonction de L

En égalisant les deux expressions de λ :

$$\frac{w}{Pm_L} = \frac{r}{Pm_K}$$

Pour Cobb-Douglas avec $Pm_L = \alpha \frac{Y}{L}$ et $Pm_K = (1 - \alpha) \frac{Y}{K}$:

$$\frac{w}{\alpha \frac{Y}{L}} = \frac{r}{(1 - \alpha) \frac{Y}{K}}$$

$$\frac{wL}{\alpha Y} = \frac{rK}{(1 - \alpha) Y}$$

$$K = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \cdot L$$

Étape 3 : Substituer dans la contrainte

$Y = AL^\alpha K^{1-\alpha} = \bar{Y}$ devient :

$$AL^\alpha \left[\frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \cdot L \right]^{1-\alpha} = \bar{Y}$$

Étape 4 : Résoudre pour L^*

$$AL^\alpha \cdot \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{w}{r} \right)^{1-\alpha} \cdot L^{1-\alpha} = \bar{Y}$$

$$A \cdot L^{\alpha+1-\alpha} \cdot \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{w}{r} \right)^{1-\alpha} = \bar{Y}$$

$$L = \frac{\bar{Y}}{A} \cdot \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{r}{w} \right)^{1-\alpha}$$

Cette méthode fonctionne mais est **lourde** et source d'erreurs.

Méthode 2 : Division des CPO (élégante et rapide) ★

L'idée clé : diviser (CPO 1) par (CPO 2) pour **éliminer λ immédiatement.**

Étape 1 : Diviser les deux CPO

$$\frac{(\text{CPO 1})}{(\text{CPO 2})} \Rightarrow \frac{w}{r} = \frac{\lambda \cdot Pm_L}{\lambda \cdot Pm_K}$$

On obtient directement :

$$\boxed{\frac{w}{r} = \frac{Pm_L}{Pm_K} = TMST_{L,K}}$$

C'est la condition d'optimalité fondamentale !

Étape 2 : Appliquer à Cobb-Douglas

Avec $TMST = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{K}{L}$:

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{K}{L}$$

D'où la relation optimale entre K et L :

$$\boxed{K^* = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \cdot L^*}$$

Étape 3 : Utiliser la contrainte pour trouver L^* et K^*

On substitue dans $A(L^*)^\alpha (K^*)^{1-\alpha} = \bar{Y}$ et on résout.

Attention – Erreur fréquente

La méthode 1 oblige à traîner λ dans tous les calculs, ce qui alourdit considérablement la résolution et multiplie les risques d'erreur.

La méthode 2 élimine λ dès le départ en divisant les CPO. **C'est la méthode à privilégier systématiquement.**

5.5 Interprétation économique de la condition d'optimalité

La condition $\frac{w}{r} = \frac{Pm_L}{Pm_K}$ peut se réécrire :

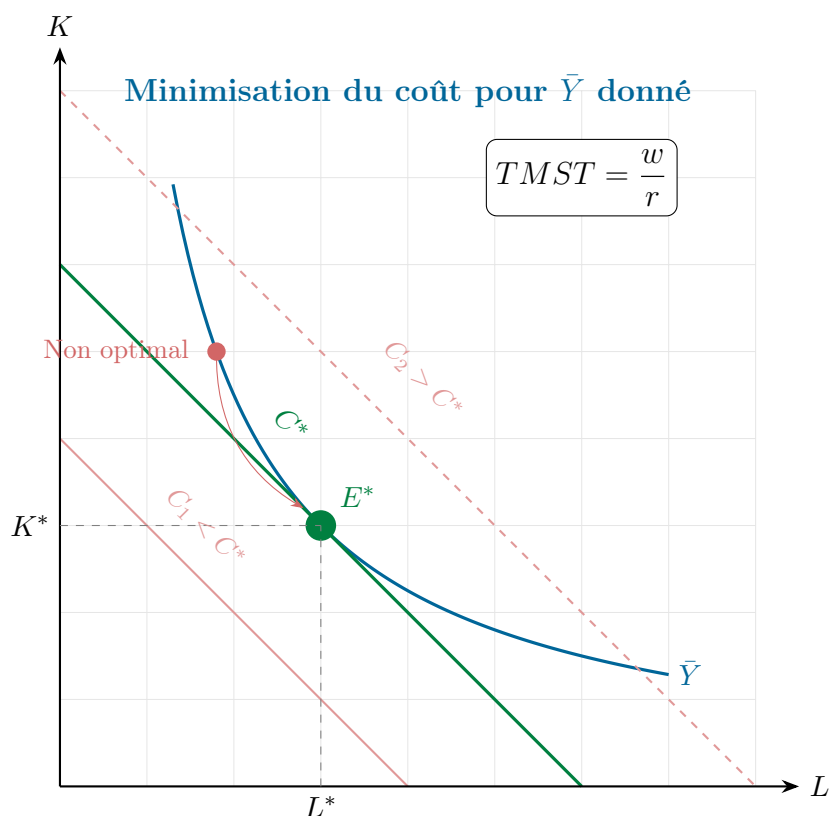
$$\frac{Pm_L}{w} = \frac{Pm_K}{r}$$

Égalisation des productivités marginales pondérées

À l'optimum, la **productivité marginale par euro dépensé** est la même pour tous les facteurs.

Intuition : Si $\frac{Pm_L}{w} > \frac{Pm_K}{r}$, alors un euro supplémentaire dépensé en travail rapporte plus qu'un euro dépensé en capital. L'entreprise a intérêt à substituer du travail au capital jusqu'à égalisation.

5.6 Représentation graphique de l'optimum



Lecture du graphique :

- L'isocoût C_1 est trop faible : il n'intersecte pas l'isoquante \bar{Y}
- L'isocoût C_2 permet de produire \bar{Y} mais coûte plus cher que nécessaire
- L'isocoût C^* est **tangent** à l'isoquante : c'est le coût minimum
- Au point E^* , les pentes sont égales : $TMST = \frac{w}{r}$

6 Application numérique complète

Minimisation du coût avec Cobb-Douglas

Une entreprise a la fonction de production $Y = L^{0.5}K^{0.5}$ (donc $A = 1$, $\alpha = 0.5$).

Les prix des facteurs sont $w = 4$ € et $r = 1$ €.

Elle souhaite produire $\bar{Y} = 100$ unités.

Trouvez la combinaison optimale (L^*, K^*) et le coût minimum C^* .

Étape 1 : Écrire le Lagrangien

$$\mathcal{L} = 4L + 1 \cdot K - \lambda [L^{0.5}K^{0.5} - 100]$$

Étape 2 : CPO

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 4 - \lambda \cdot 0.5 \cdot L^{-0.5} K^{0.5} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 = \lambda \cdot \frac{0.5K^{0.5}}{L^{0.5}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 1 - \lambda \cdot 0.5 \cdot L^{0.5} K^{-0.5} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \lambda \cdot \frac{0.5L^{0.5}}{K^{0.5}}$$

Étape 3 : Diviser les CPO pour éliminer λ

$$\frac{4}{1} = \frac{\lambda \cdot \frac{0.5K^{0.5}}{L^{0.5}}}{\lambda \cdot \frac{0.5L^{0.5}}{K^{0.5}}} = \frac{K^{0.5}}{L^{0.5}} \cdot \frac{K^{0.5}}{L^{0.5}} = \frac{K}{L}$$

Donc : $K^* = 4L^*$

Vérification avec la formule générale :

$$K^* = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \cdot L^* = \frac{0.5}{0.5} \cdot \frac{4}{1} \cdot L^* = 4L^* \quad \checkmark$$

Étape 4 : Utiliser la contrainte

$$(L^*)^{0.5}(K^*)^{0.5} = 100$$

$$(L^*)^{0.5}(4L^*)^{0.5} = 100$$

$$(L^*)^{0.5} \cdot 2 \cdot (L^*)^{0.5} = 100$$

$$2L^* = 100 \quad \Rightarrow \quad L^* = 50$$

Et donc : $K^* = 4 \times 50 = K^* = 200$

Étape 5 : Calculer le coût minimum

$$C^* = wL^* + rK^* = 4 \times 50 + 1 \times 200 = 200 + 200 = 400 \text{ €}$$

7 La fonction de coût

7.1 Du choix optimal à la fonction de coût

En résolvant le problème de minimisation pour **différentes valeurs** de \bar{Y} , on obtient les demandes conditionnelles de facteurs $L^*(Y)$ et $K^*(Y)$, puis la **fonction de coût** :

$$C(Y) = w \cdot L^*(Y) + r \cdot K^*(Y)$$

7.2 Fonction de coût pour Cobb-Douglas

Pour $Y = AL^\alpha K^{1-\alpha}$, on peut montrer que :

$$C(Y) = \kappa \cdot Y$$

où κ est une constante qui dépend de A , α , w et r :

$$\kappa = \frac{1}{A} \left(\frac{w}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{r}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

Remarque importante

Avec des rendements d'échelle constants ($\alpha + \beta = 1$), la fonction de coût est **linéaire** en Y . Le coût moyen et le coût marginal sont donc constants et égaux :

$$CM = \frac{C(Y)}{Y} = \kappa \quad \text{et} \quad Cm = \frac{dC}{dY} = \kappa$$

8 Maximisation du profit

8.1 Le problème en deux étapes

La maximisation du profit peut se décomposer en deux étapes :

1. **Étape 1 (déjà résolue)** : Pour chaque niveau de production Y , minimiser le coût \Rightarrow fonction de coût $C(Y)$
2. **Étape 2** : Choisir le niveau de production Y^* qui maximise le profit

8.2 Le programme de maximisation

Le profit de l'entreprise est :

$$\Pi = \text{Recettes} - \text{Coûts} = pY - C(Y)$$

où p est le prix de vente du bien.

Le programme s'écrit :

$$\boxed{\max_Y \Pi(Y) = pY - C(Y)}$$

8.3 Condition du premier ordre

$$\frac{d\Pi}{dY} = 0 \quad \Rightarrow \quad p - \frac{dC}{dY} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = Cm}$$

Condition d'optimalité du producteur

À l'optimum, le **prix** égale le **coût marginal** :

$$p = Cm = \frac{dC}{dY}$$

8.4 Condition du second ordre

Pour que ce soit un maximum :

$$\frac{d^2\Pi}{dY^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{d^2C}{dY^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dCm}{dY} > 0$$

Le coût marginal doit être **croissant** au point d'optimum.

Remarque importante

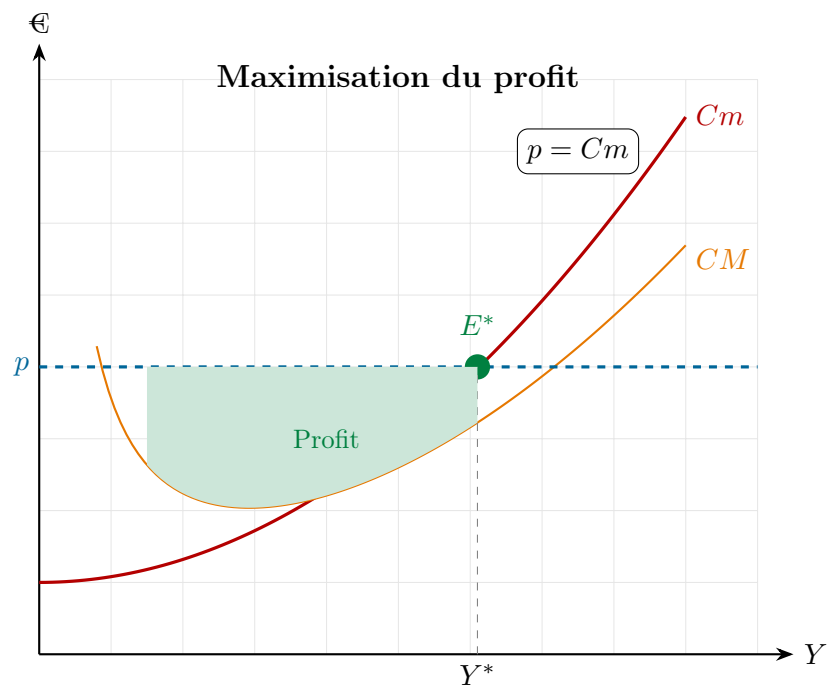
Avec des rendements d'échelle constants (Cobb-Douglas avec $\alpha + \beta = 1$), le coût marginal est constant : $Cm = \kappa$.

Dans ce cas :

- Si $p > \kappa$: l'entreprise veut produire une quantité infinie (profit toujours croissant)
- Si $p < \kappa$: l'entreprise ne produit rien (profit négatif)
- Si $p = \kappa$: l'entreprise est indifférente à tout niveau de production (profit nul)

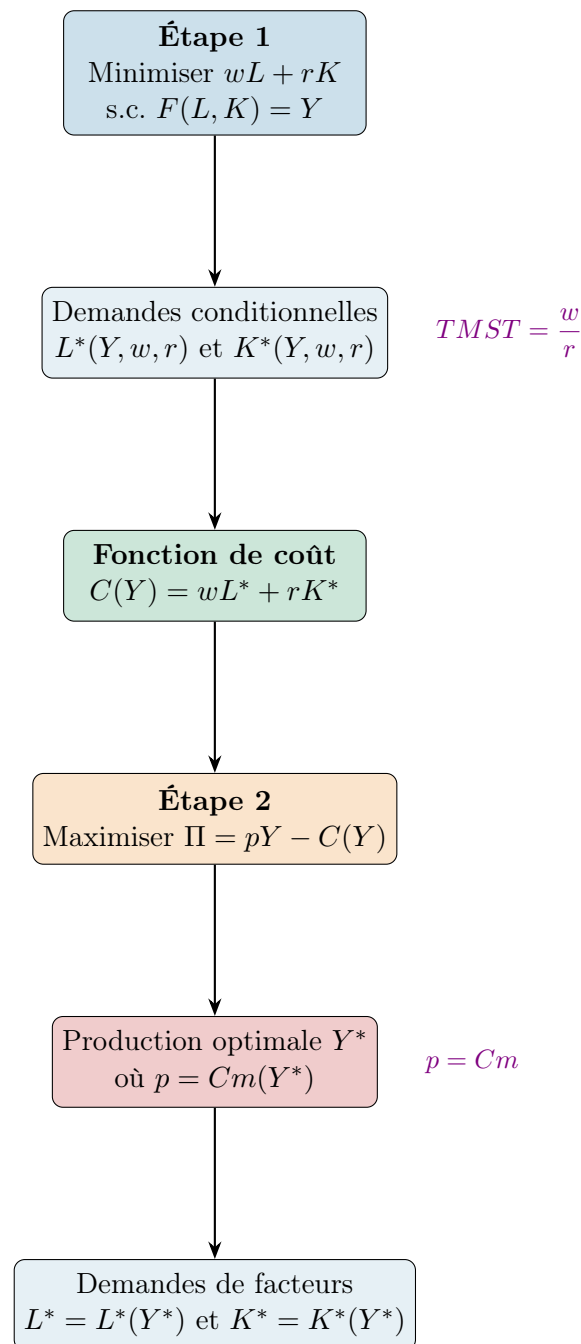
C'est pourquoi on considère souvent des rendements d'échelle décroissants pour avoir une solution intérieure.

8.5 Représentation graphique

**Lecture du graphique :**

- L'entreprise produit Y^* où $p = Cm$
- Le profit unitaire est $p - CM(Y^*)$ (distance verticale entre p et CM)
- Le profit total est l'aire du rectangle (zone verte)
- Si $p < CM$ partout, l'entreprise fait des pertes et peut décider de ne pas produire

8.6 Résumé : la logique complète de l'optimisation



8.7 Les conditions d'optimalité en résumé

Problème	Condition	Interprétation
Minimisation du coût	$TMST = \frac{w}{r}$ $\frac{Pm_L}{w} = \frac{Pm_K}{r}$	Égalisation des Pm par € dépensé
Maximisation du profit	$p = Cm$ $p = \frac{dC}{dY}$	Prix = coût de la dernière unité

9 Exercice récapitulatif

Exercice complet

Une entreprise a la fonction de production $Y = 2L^{0.4}K^{0.6}$.

Les prix des facteurs sont $w = 10$ € et $r = 15$ €.

Le prix de vente est $p = 6$ €.

Questions :

1. Écrivez le Lagrangien pour minimiser le coût de production de \bar{Y} unités.
2. Trouvez la relation optimale entre K^* et L^* (méthode de division des CPO).
3. Pour $\bar{Y} = 200$, calculez L^* , K^* et C^* .
4. Interprétez économiquement la condition $TMST = w/r$.

1. Lagrangien

$$\mathcal{L} = 10L + 15K - \lambda [2L^{0.4}K^{0.6} - \bar{Y}]$$

2. Division des CPO

CPO par rapport à L :

$$10 = \lambda \cdot 2 \cdot 0.4 \cdot L^{-0.6} K^{0.6} = 0.8\lambda \cdot \frac{K^{0.6}}{L^{0.6}}$$

CPO par rapport à K :

$$15 = \lambda \cdot 2 \cdot 0.6 \cdot L^{0.4} K^{-0.4} = 1.2\lambda \cdot \frac{L^{0.4}}{K^{0.4}}$$

Division :

$$\frac{10}{15} = \frac{0.8\lambda \cdot \frac{K^{0.6}}{L^{0.6}}}{1.2\lambda \cdot \frac{L^{0.4}}{K^{0.4}}} = \frac{0.8}{1.2} \cdot \frac{K^{0.6}}{L^{0.6}} \cdot \frac{K^{0.4}}{L^{0.4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{K}{L}$$

Donc :

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{K}{L} \Rightarrow \boxed{K^* = L^*}$$

Vérification : $K^* = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{w}{r} \cdot L^* = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{10}{15} \cdot L^* = 1.5 \times \frac{2}{3} \cdot L^* = L^* \quad \checkmark$

3. Calcul numérique pour $\bar{Y} = 200$

Contrainte : $2(L^*)^{0.4}(K^*)^{0.6} = 200$

Avec $K^* = L^*$:

$$2(L^*)^{0.4}(L^*)^{0.6} = 2L^* = 200 \Rightarrow \boxed{L^* = K^* = 100}$$

Coût minimum :

$$C^* = 10 \times 100 + 15 \times 100 = \boxed{2500 \text{ €}}$$

4. Interprétation

$TMST = \frac{w}{r}$ signifie que le taux auquel l'entreprise *peut techniquement* substituer du travail au capital (TMST) égale le taux auquel elle *doit économiquement* le faire (rapport des prix w/r).

Équivalamment : $\frac{Pm_L}{w} = \frac{Pm_K}{r}$ signifie que le dernier euro dépensé en travail rapporte autant que le dernier euro dépensé en capital.