

La Méthode de Newton pour le Calcul des Volatilités Implicites

Une approche pédagogique

Finance Quantitative

Formation Marché des Options

15 mars 2025

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 La méthode de Newton
- 3 Implémentation en R
- 4 Analyse des résultats

La méthode de Newton pour le calcul de la volatilité implicite

Une approche pédagogique

Présentation quantitative

Formation Marché des Options

15 mars 2025

- 1 Introduction
- 2 La méthode de Newton
- 3 Implémentation en R
- 4 Analyse des résultats

- La **volatilité implicite** est un paramètre crucial sur les marchés d'options
- Elle représente la volatilité σ qui, insérée dans le modèle de Black-Scholes, donne un prix théorique égal au prix du marché
- Problème inverse : on connaît le prix, on cherche σ
- Équation à résoudre : $\text{Prix_BS}(\sigma) - \text{Prix_marché} = 0$
- Pas de solution analytique $\rightarrow$ méthodes numériques

- Méthode itérative pour trouver les zéros d'une fonction $f(x)$
- Utilise la dérivée $f'(x)$ pour approximer la fonction par sa tangente
- Formule de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

- Interprétation géométrique : intersection de la tangente avec l'axe des abscisses
- Convergence quadratique si la valeur initiale est proche de la solution

Pour trouver la volatilité implicite, on définit :

$$f(\sigma) = \text{Prix_BS}(\sigma) - \text{Prix_marché} \quad (2)$$

$$f'(\sigma) = \text{Vega}(\sigma) \quad (3)$$

L'algorithme devient :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{\text{Prix_BS}(\sigma_n) - \text{Prix_marché}}{\text{Vega}(\sigma_n)} \quad (4)$$

Où **Vega** est la sensibilité du prix de l'option par rapport à la volatilité.

Fonctions de base

```
# Fonction de prix d'option selon Black-Scholes
black_scholes_call <- function(S, K, T, r, sigma) {
  d1 <- (log(S/K) + (r + sigma^2/2)*T) / (sigma*sqrt(T))
  d2 <- d1 - sigma*sqrt(T)
  return(S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2))
}

# Vega de l'option (dérivée du prix par rapport à sigma)
vega <- function(S, K, T, r, sigma) {
  d1 <- (log(S/K) + (r + sigma^2/2)*T) / (sigma*sqrt(T))
  return(S*sqrt(T)*dnorm(d1))
}
```

Méthode de Newton pour la volatilité implicite

```
# Méthode de Newton pour trouver la volatilité implicite
implied_volatility_newton <- function(market_price, S, K, T, r,
                                     initial_vol=0.2,
                                     max_iterations=100,
                                     precision=1e-6) {

  sigma <- initial_vol

  # Pour tracer la convergence
  itérations <- c(0)
  sigmas <- c(sigma)

  for (i in 1:max_iterations) {
    price <- black_scholes_call(S, K, T, r, sigma)
    price_diff <- price - market_price

    if (abs(price_diff) < precision) {
      cat(sprintf("Convergence en %d itérations\n", i))
      break
    }
  }
}
```

Méthode de Newton (suite)

```
v <- vega(S, K, T, r, sigma)
# viter la division par zéro
if (v == 0) {
  sigma <- sigma * 1.5
  next
}

# Méthode de Newton
sigma_new <- sigma - price_diff / v

# Borner la volatilité
sigma_new <- max(0.001, min(sigma_new, 5))

iterations <- c(iterations, i)
sigmas <- c(sigmas, sigma_new)

# Mise à jour
sigma <- sigma_new
}

return(list(implied_vol = sigma,
            iterations = iterations,
            sigmas = sigmas))
}
```

Paramètres et calcul du prix

```
# Paramètres de l'option
S <- 100      # Prix du sous-jacent
K <- 100      # Prix d'exercice
T <- 1        # Temps à maturité (en années)
r <- 0.05     # Taux sans risque
true_vol <- 0.2 # Volatilité réelle

# Calculer le prix du marché (simulé avec volatilité connue)
market_price <- black_scholes_call(S, K, T, r, true_vol)

# Valeurs initiales à tester
initial_vols <- c(0.1, 0.3, 0.5)
```

Code pour les graphiques

```
# Configurer un graphique à deux panneaux
par(mfrow = c(2, 1), mar = c(4, 4, 3, 1))
colors <- c("blue", "green", "purple")

# Premier graphique pour la convergence
plot(NA, xlim = c(0, 10), ylim = c(0, 0.6),
     xlab = "Itérations", ylab = "Volatilité estimée",
     main = "Convergence de la méthode de Newton pour
           différentes valeurs initiales")
abline(h = true_vol, col = "red", lty = 2, lwd = 2)

# Résoudre pour chaque valeur initiale
for (i in 1:length(initial_vols)) {
  initial_vol <- initial_vols[i]
  result <- implied_volatility_newton(
    market_price, S, K, T, r, initial_vol)

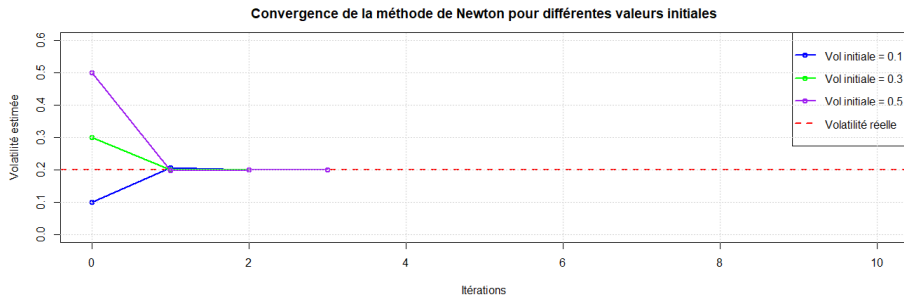
  lines(result$iterations, result$sigmas,
        type = "o", col = colors[i], lwd = 2)
}
```

Code pour le graphique de la fonction objectif

```
# Deuxième graphique pour la fonction objectif
sigmas_range <- seq(0.05, 0.4, length.out = 100)
price_diffs <- sapply(sigmas_range, function(sigma) {
  black_scholes_call(S, K, T, r, sigma) - market_price
})

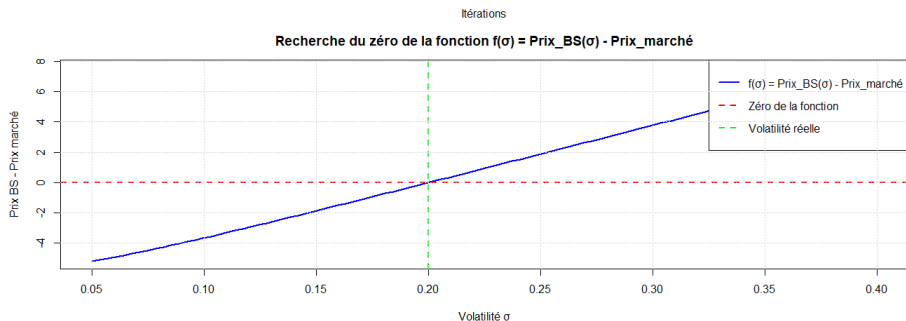
plot(sigmas_range, price_diffs, type = "l",
     col = "blue", lwd = 2,
     xlab = "Volatilité",
     ylab = "Prix BS - Prix marché",
     main = "Recherche du zéro de la fonction
           f( ) = Prix_BS( ) - Prix_marché")
abline(h = 0, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
abline(v = true_vol, col = "green", lty = 2, lwd = 2)
```

Convergence de la méthode de Newton



- Quelle que soit la valeur initiale, la convergence est rapide (2-3 itérations)
- La convergence est quadratique : l'erreur est approximativement au carré à chaque itération
- L'algorithme est stable pour des valeurs initiales raisonnables

Fonction objectif et recherche du zéro



- La fonction $f(\sigma) = \text{Prix_BS}(\sigma) - \text{Prix_marché}$ est monotone croissante
- Le zéro de cette fonction (ligne rouge horizontale) correspond exactement à la volatilité réelle (ligne verte verticale)
- La pente (le vega) est plus forte pour σ faible, ce qui explique les différences de convergence

- La volatilité implicite est un **indicateur prospectif** des anticipations du marché
- Un "smile" ou "skew" de volatilité indique que le marché ne croit pas aux hypothèses de Black-Scholes (distribution log-normale des rendements)
- La volatilité implicite est supérieure à la volatilité historique en période d'incertitude
- Le calcul rapide et précis de la volatilité implicite est essentiel pour :
 - L'arbitrage
 - La valorisation d'options exotiques
 - La gestion des risques

Avantages :

- Convergence quadratique (très rapide)
- Simple à implémenter
- Précision élevée

Limites :

- Nécessite le calcul de la dérivée (vega)
- Peut diverger si la valeur initiale est trop éloignée
- Sensible aux régions où le vega est proche de zéro
- Alternatives : méthode de la bisection, méthode de Brent

- La méthode de Newton est l'algorithme le plus utilisé pour calculer la volatilité implicite
- Sa convergence rapide la rend adaptée aux systèmes de trading en temps réel
- Pour les options ATM (at-the-money), une valeur initiale de 0.2-0.3 donne généralement de bons résultats
- Pour les options ITM/OTM (in/out-of-the-money), il faut ajuster la valeur initiale
- L'algorithme peut être adapté pour d'autres modèles que Black-Scholes (Heston, SABR...)

- Haug, E. G. (2007). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill.
- Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson.
- Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Wiley.
- Jäckel, P. (2002). *Monte Carlo Methods in Finance*. Wiley.

Formule de Black-Scholes pour le Call

Avec ajustement pour les dividendes

Formule du Call avec dividendes

$$C = Se^{-qT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

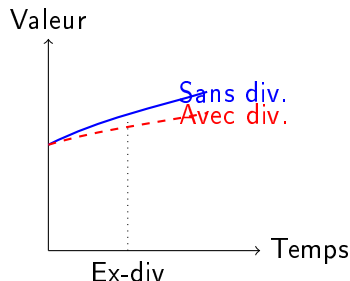
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- S = prix du sous-jacent (CAC40 = 7900)
- K = prix d'exercice (8100)
- T = temps jusqu'à l'échéance (3 mois = 0.25)
- r = taux d'intérêt sans risque (3%)
- q = taux de rendement du dividende (2%)
- σ = volatilité à déterminer

Pourquoi inclure les dividendes ?

- Le modèle original de Black-Scholes ne tient pas compte des dividendes
- Sans ajustement :
$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$
- Pour les indices comme le CAC40, les dividendes ont un impact significatif
- Le versement de dividendes réduit la valeur future attendue du sous-jacent
- Cet effet diminue la valeur des calls et augmente celle des puts



Calcul de la volatilité implicite avec Newton-Raphson

Paramètres du problème

- Sous-jacent : CAC40 à 7900 points
- Option : Call avec strike à 8100 points
- Maturité : 3 mois (0.25 ans)
- Taux sans risque : 3%
- Rendement du dividende : 2%
- Prix du Call observé : 200€
- Volatilité historique : 19%

Principe

On cherche σ tel que $C(\sigma) = C_{march}$

Formule de récurrence

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{C(\sigma_n) - C_{march}}{\text{vega}(\sigma_n)}$$

- $\text{vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S e^{-qT} n(d_1) \sqrt{T}$
- $n(x)$ est la fonction de densité de la loi normale standard
- Point de départ : volatilité historique $\sigma_0 = 19\%$

Itération 1 : Calcul avec volatilité historique

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\ln(7900/8100) + (0.03 - 0.02 + 0.19^2/2) \times 0.25}{0.19 \times \sqrt{0.25}} \\&= \frac{-0.0251 + 0.0070}{0.095} = -0.1905\end{aligned}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -0.1905 - 0.095 = -0.2855$$

$$N(d_1) = 0.4245$$

$$N(d_2) = 0.3877$$

Rappel formule du Call avec dividende : $C = Se^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$

$$\begin{aligned}C &= 7900 \times e^{-0.02 \times 0.25} \times 0.4245 - 8100 \times e^{-0.03 \times 0.25} \times 0.3877 \\&= 3335.18 - 3120.58 = \mathbf{214.60\text{€}}\end{aligned}$$

Définition formelle

Le vega mesure la sensibilité du prix d'une option aux variations de la volatilité implicite.

$$vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

Interprétation concrète

Un vega de 1539.96 signifie que pour chaque point de pourcentage (1%) de changement dans la volatilité implicite, le prix de l'option change de 15,40€.

Exemple pratique

Impact des variations de volatilité sur le prix

Volatilité	Variation	Impact sur le prix
19% → 20%	+1 point	+15,40€
19% → 18%	-1 point	-15,40€
19% → 21%	+2 points	+30,80€
19% → 17%	-2 points	-30,80€

Formule

$$\Delta \text{Prix} \approx \text{vega} \times \Delta \sigma$$

où $\Delta \sigma$ est exprimé en points de pourcentage

- **Valeur élevée** : Un vega de 1500+ est considéré comme important, indiquant une forte sensibilité à la volatilité
- **Exposition au risque** : Les positions avec un vega élevé sont très exposées aux changements de sentiment du marché concernant la volatilité future
- **Stratégies** : Cette option serait appropriée pour des stratégies directionnelles sur la volatilité plutôt que sur le prix du sous-jacent
- **Couverture** : Pour neutraliser ce risque, un trader pourrait prendre des positions opposées avec un vega similaire

Facteurs influençant le vega

Pourquoi ce vega est-il si élevé ?

- **Valeur du sous-jacent** : Le vega est proportionnel à la valeur du sous-jacent
 - CAC40 à 7900 points → valeur élevée → vega élevé
- **Proximité à la monnaie** : Le vega est maximal pour les options ATM
 - Strike à 8100 vs sous-jacent à 7900 → proche de la monnaie → vega élevé
- **Maturité** : Le vega est plus élevé pour les options à moyen terme
 - Option à 3 mois → ni trop courte ni trop longue → vega significatif
- **Niveau de volatilité** : Le vega est inversement proportionnel au niveau de volatilité
 - Volatilité de 19% → niveau modéré → vega relativement élevé

Formule du vega

$$\text{vega} = S \cdot e^{-qT} \cdot n(d_1) \cdot \sqrt{T}$$

En fonction du temps :

- Le vega diminue à l'approche de l'échéance
- Les options de très court terme ont un vega proche de zéro
- Les options de long terme (LEAP) ont un vega plus élevé

En fonction de la moneyness :

- Maximal pour les options ATM (at-the-money)
- Diminue pour les options OTM (out-of-the-money)
- Diminue pour les options ITM (in-the-money)

Importance pour la gestion de portefeuille

Le vega est particulièrement important pour gérer le risque lié aux variations de volatilité dans un portefeuille d'options. Un portefeuille "vega-neutre" est insensible aux variations de volatilité.

Méthode de Newton-Raphson

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{C(\sigma_n) - C_{march}}{vega(\sigma_n)}$$

- ① Calcul du vega (sensibilité du prix à la volatilité)

$$\begin{aligned} vega &= S \cdot e^{-qT} \cdot n(d_1) \cdot \sqrt{T} \\ &= 7900 \times e^{-0.02 \times 0.25} \times 0.3912 \times \sqrt{0.25} \\ &= 7900 \times 0.995 \times 0.3912 \times 0.5 = 1539.96 \end{aligned}$$

- ② Calcul de l'ajustement

$$\begin{aligned} Ajustement &= \frac{C(\sigma_1) - C_{march}}{vega(\sigma_1)} \\ &= \frac{214.60 - 200.00}{1539.96} = \frac{14.60}{1539.96} = 0.0095 \end{aligned}$$

- ③ Nouvelle volatilité

$$\sigma_2 = \sigma_1 - Ajustement \text{ et donc } = 19.00\% - 0.95\% = 18.05\%$$

Iter.	σ_n (%)	Prix (€)	Diff. (€)	Vega	Ajust.
1	19.00	214.60	14.60	1539.96	0.0095
2	18.05	204.76	4.76	1550.65	0.0031
3	17.74	201.32	1.32	1554.25	0.0008
4	17.66	200.36	0.36	1555.14	0.0002
5	17.64	200.10	0.10	1555.38	0.0001
6	17.63	200.00	0.00	1555.41	0.0000

Convergence

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{C(\sigma_n) - 200}{vega(\sigma_n)}$$

Résultat

- Volatilité historique : 19.00%
- Volatilité implicite : 17.63%
- Décote de volatilité : -1.37 points
- Décote relative : -7.21%

Interprétation économique

La volatilité implicite inférieure à la volatilité historique suggère que le marché anticipe une période de plus faible volatilité pour le CAC40.

Conclusion

- L'algorithme de Newton-Raphson converge rapidement vers la volatilité implicite
- Avec seulement 6 itérations, on obtient une précision inférieure à 1 centime
- La volatilité implicite (17.63%) est significativement inférieure à la volatilité historique (19%)
- Cette décote suggère des attentes de marché orientées vers plus de stabilité

Rappel

La volatilité implicite reflète les anticipations du marché concernant la volatilité future du sous-jacent, et non nécessairement sa volatilité réelle future.