

Assurance et gestion des risques

Questions et exercices à connaître

Mickaël Clévenot

20 janvier 2025

Question 1) Il sera demandé aux étudiants de rappeler l'un des axiomes de la méthodologie développée par Von Neumann et Morgenstern.

Question 2) En quoi la théorie de l'assurance constitue-t-elle une discipline hybride ?

Question 3) Ordinalité vs. Cardinalité ?

Question 4) Pourquoi seules les transformations affines positives permettent de conserver la cardinalité des fonctions d'utilité ?

Question 5) Définition littéraire, équation et représentation graphique du comportement d'un agent risquophile, neutre au risque ou risquophobe ?

Question 6) Responsabilité civile et pénale dans le cadre de l'assurance ?

Question 7) Qu'est-ce qu'un bien assurable ?

Question 8) Définition du contrat d'assurance ?

Question 9) Principe indemnitaire, principe forfaitaire ?

Question 10) Quelles sont les trois règles qui permettent à l'assurance de fonctionner normalement et d'être rentable ?

Question 11) Quels sont les différents types d'assurance ?

Question 12) De quoi dépend le risque ?

Question 13) La notion de concavité en assurance ?

Question 14) La notion de prime de risque en assurance ?

Question 15) La notion d'équivalent certain en assurance ?

Question 16) Implications d'une assurance complète sur l'assuré et l'assurance ?

Question 17) Implication de la notion de co-assurance sur l'assuré et l'assurance ?

Question 18) Définition des notions d'auto-assurance et d'auto-protection ?

Question 19) Implication de la notion de prévention en assurance ?

Question 20) Aléas moral/risque adverse, conséquences sur l'activité d'assurance ?

Question 21) Méthodologie de Markowitz appliquée à l'assurance ?

Question 22) A quoi sert le coefficient de sécurité en assurance ?

Question 23) Sensibilité, durée, équations, explications ?

Question 24) Caractéristiques de l'assurance vie ?

Question 25) Pourquoi et comment l'assureur sélectionne les risques ?

Question 26) A quoi correspond la notion de VaR? Quelles implication pour les assureurs et le régulateur, modèle interne ?

Question 27) A quoi correspond le marché de l'assurance, les marchés financiers et le marché du risque ?

Question 28) Pourquoi se sert-on des loteries en assurance ?

Question 29) Risques vs. incertitudes, les limites de l'économie de l'assurance ?

Question 30) Question surprise ?

Exercices :

1. Construction et interprétation d'une fonction d'utilité espérée VNM.
2. Calcul du prix de vente et du prix d'achat d'une loterie.
3. Calcul de l'équivalent certain et de la prime de risque (pas Arrow-Pratt).
4. Niveau de protection optimal pour les économistes (pas de franchise).
5. Eeckhout calcul des variances et espérance d'utilité. Calcul du coefficient de sécurité et de la probabilité de ruine.
6. Risque de taux, duration et sensibilité
7. Tarification de l'assurance vie
8. Calculs de la VaR.

1 Questions de cours

Question 1) Quelles sont les trois règles qui permettent à l'assurance de fonctionner normalement et d'être rentable ?

2 points

Question 2) Implications d'une assurance complète sur l'assuré et l'assurance ?

2 points

Question 3) Aléas moral/risque adverse, conséquences sur l'activité d'assurance ?

2 points

Question 4) A quoi correspond la notion de VaR ?

2 points

Question 5) Risques vs. incertitudes, les limites de l'économie de l'assurance ?

2 points

Question 6) Roles de l'assurance dans l'économie ?

2 points

2 Exercice taux de protection optimal

Un particulier possède une maison de maître du $XVIII^{me}$ siècle rue Berbisey. La demeure est splendide, la pourtraison à la française en bois massif est connue pour les risques incendies. Le bien immobilier a été évalué à 3 millions d'euros. Le déclenchement d'un incendie pourrait détruire les $2/3$ de sa valeur. La probabilité d'un tel risque est de 10 %. On raisonne en K€, la richesse initiale représente donc 3000 K€. On précise que le futur assuré possède une fonction d'utilité de la forme suivante :

$$U(W) = \ln(W)$$

Afin d'éviter le pire, il décide d'assurer le bien. A cette fin, il contacte 2 assureurs. Voilà les contrats qui lui sont proposés :

$$\text{Contrat A} = \begin{cases} P = 210 \cdot \alpha \\ I = 1500 \cdot \alpha \end{cases}$$

$$\text{Contrat B} = \begin{cases} P = 260 \cdot \alpha \\ I = 1800 \cdot \alpha \end{cases}$$

En fonction des 2 contrats et des situations avec ou sans sinistre vous dresserez un tableau des niveau de la richesse de l'agent.

2 points

Pour les 2 contrats, vous établirez la proportion α qu'il compte assurer en fonction des 2 contrats de manière à maximiser son utilité ?

4 points

Question 4.3) Vous commenterez vous résultats en expliquant quelle situation il va choisir ?

2 points

3 Correction exercice

Je crois me rappelé avoir corrigé l'énoncé car avec celui que je vous avez présenté l'exercice était incohérent avec une $\alpha > 1$ Avec des primes des 200 et 250 α on retrouve des résultats cohérentes. J'avais été trop généreux avec mon assuré. Le résultat était mathématiquement juste mais l'énoncé était erroné. On corrige.

Pour réaliser ce travail, on décompose les situations avec et sans sinistre :

$$W_1 = W_0 - P \text{ et } W_2 = W_0 - P - S + I$$

On remplace par les valeurs de l'énoncé corrigé. Pour le premier contrat

$W_1 = 3000 - 200 \cdot \alpha$ et $W_2 = 3000 - 200 \cdot \alpha - 2000 + 1500 \cdot \alpha$ On cherche à maximiser la fonction d'utilité espérée :

$$UE_1 = 0.1 \cdot \ln(1000 + 1300 \cdot \alpha) + 0.9 \cdot \ln(3000 - 300 \cdot \alpha + 1500 \cdot \alpha)$$

Pour maximiser, on doit annuler la dérivée première :

$$\frac{\partial UE_1}{\partial \alpha} = \frac{130.0}{1300 \cdot \alpha + 1000} - \frac{180.0}{3000 - 200 \cdot \alpha} = 0 \text{ il vient : } \frac{130.0}{1300 \cdot \alpha + 1000} = \frac{180.0}{3000 - 200 \cdot \alpha}$$

$$130 \cdot 3000 + 130 \cdot (-200\alpha) = 180 \cdot 1300 \cdot \alpha + 180 \cdot 1000$$

$$390000 - 26000\alpha = 234000\alpha + 180000 \Rightarrow 390000 - 180000 = 234000\alpha + 26000\alpha \quad 210000 = 260000\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{21}{26} = 0.807$$

Le taux de protection optimal dans le cadre du premier contrat est de 80,7 %.

Pour le second contrat la fonction d'utilité espérée vaut :

$$UE_2 = 0.1 \cdot \ln(1000 - 250 \cdot \alpha + 1800 \cdot \alpha) + 0.9 \cdot \ln(3000 - 250 \cdot \alpha)$$

On dérive par rapport à la α :

$$\frac{\partial UE_2}{\partial \alpha} = \frac{155.0}{1550 \cdot \alpha + 1000} - \frac{225.0}{3000 - 250 \cdot \alpha} = 0 \text{ il vient : } \frac{155.0}{1550 \cdot \alpha + 1000} = \frac{225.0}{3000 - 250 \cdot \alpha}$$

$$155 \cdot 3000 - 155 \cdot 250\alpha = 225 \cdot 1550 \cdot \alpha + 225 \cdot 1000$$

$$465000 - 38750 \cdot \alpha = 348750 \cdot \alpha + 225000 \Rightarrow 465000 - 225000 = 38750 \cdot \alpha + 348750 \cdot \alpha$$

$$240000 = 387500\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{240}{387,5} = 0.6193$$

Le taux de protection optimal dans le cadre du second contrat est de 61,9 %.

Compte tenu des éléments obtenus précédemment on peut établir le niveau de l'indemnité et le niveau de la prime dans les 2 contrats. Pour le premier contrat : $0.807 \cdot 200 = \mathbf{161,4}$ pour le prime et $0.807 \cdot 1500 = \mathbf{1210,5}$. Pour le second contrat : $0.6193 \cdot 250 = \mathbf{154,825}$ et des indemnités : $0.6193 \cdot 1800 = \mathbf{1114,74}$.

On constate finalement que les contrats sont assez proches. Pour les distinguer, on va calculer les utilités obtenue à travers ces 2 contrats.

$$UE_1 = 0.1 \cdot \ln(3000 - 2000 - 161.4 + 1210.5) + 0.9 \cdot \ln(3000 - 161,4) = 7.9184$$

$$UE_2 = 0.1 \cdot \ln(3000 - 2000 - 154.825 + 1114.74) + 0.9 \cdot \ln(3000 - 154.825) = 7.9161$$

Comme on pouvait s'y attendre le contrat A est légèrement plus utile pour l'assuré. Si on rejoint une logique de placement, en cas d'accident le placement de 200 rapporterait 1500 (7.5) alors que pour le second contrat 250 rapporte 1800 en cas de sinistre (7.2).

4 Questions de cours pour tous

Question 1.1) Implication de la notion de co-assurance sur l'assuré et l'assurance ? **2 points**

Question 1.2) Pourquoi se sert-on des loteries en assurance ? **2 points**

Question 1.3) Principe indemnitaires, principe forfaitaire ? **2 points**

Question 1.4) Que savez-vous des mutuelles ? **3 points**

Question 1.5) Vous définirez le principe de la VaR et son usage particulier dans le domaine de l'assurance ? **2 points**

5 Exercice pour les non-économistes, évaluation des fonds propres

Suite à la question précédente, vous devrez calculer la VaR d'une assurance dont les caractéristiques sont les suivantes. Elle possède 90 000 euros de fonds propres. Ces fonds propres sont composés exclusivement de titres dont le profil de rendements suit une loi normale avec un écart type de 35% sur une année.

Question 2.1) Quelle est la perte maximale possible sur ce portefeuille pour un seuil de risque de 1% et de 0,5% ? **2 points**

Question 2.2) Dans le cas présent, le risque venait exclusivement du côté actif. Mais l'assurance doit également faire face à des risques du côté du passif. Vous rappellerez et commenterez la formule qui permet de contrôler ces risques lorsqu'ils suivent une loi normale (2 formules). **2 points**

Question 2.3) L'assurance dispose toujours du même montant de capital 90 000 euros. Son taux de chargement est de 5%. L'espérance de sinistre est de 800 par assuré et l'écart type des sinistres est de 6000. L'assureur a 5000 assurés. L'activité est-elle soutenable financièrement ? Vous réaliserez les calculs à partir des 2 formules. **2 points**

Question 2.4) Que se passerait-il si de mauvais résultats apparaissaient à l'actif (VaR à 1 0,5% et 0,01%) ? **3 points**

6 Questions de cours pour tous

Question 1.1) Implication de la notion de co-assurance sur l'assuré et l'assurance ? **2 points**

Question 1.2) Pourquoi se sert-on des loteries en assurance ? **2 points**

Question 1.3) Principe indemnitaire, principe forfaitaire ? **2 points**

Question 1.4) Que savez-vous des mutuelles ? **3 points**

Question 1.5) Vous définirez le principe de la VaR et son usage particulier dans le domaine de l'assurance ? **2 points**

7 Exercice pour les non-économistes, évaluation des fonds propres

Suite à la question précédente, vous devrez calculer la VaR d'une assurance dont les caractéristiques sont les suivantes. Elle possède 90 000 euros de fonds propres. Ces fonds propres sont composés exclusivement de titres dont le profil de rendements suit une loi normale avec un écart type de 35% sur une année.

Question 2.1) Quelle est la perte maximale possible sur ce portefeuille pour un seuil de risque de 1% et de 0,5% ? **2 points**

Question 2.2) Dans le cas présent, le risque venait exclusivement du côté actif. Mais l'assurance doit également faire face à des risques du côté du passif. Vous rappellerez et commenterez la formule qui permet de contrôler ces risques lorsqu'ils suivent une loi normale (2 formules). **2 points**

Question 2.3) L'assurance dispose toujours du même montant de capital 90 000 euros. Son taux de chargement est de 5%. L'espérance de sinistre est de 800 par assuré et l'écart type des sinistres est de 6000. L'assureur a 5000 assurés. L'activité est-elle soutenable financièrement ? Vous réaliserez les calculs à partir des 2 formules.

2 points

Question 2.4) Que se passerait-il si de mauvais résultats apparaissaient à l'actif (VaR à 1 0,5% et 0,01%) ?

3 points

8 Exercice Uniquement pour les économistes

Définition du taux de protection optimal

Question 3.1) Un particulier possède une maison de maître du *XVIII^{me}* siècle rue Berbisey. La demeure est splendide, la poutraison à la française en bois massif est connue pour les risques incendies. Le bien immobilier a été évalué à 3 millions d'euros. Le déclenchement d'un incendie pourrait détruire les 2/3 de sa valeur. La probabilité d'un tel risque est de 10 %. On raisonne en K€, la richesse initiale représente donc 3000 K€. On précise que le futur assuré possède une fonction d'utilité de la forme suivante :

$$U(W) = \ln(W)$$

Afin d'éviter le pire, il décide d'assurer le bien. A cette fin, il contacte 2 assureurs. Voilà les contrats qui lui sont proposés :

$$\text{Contrat A} = \begin{cases} P = 200 \cdot \alpha \\ I = 1500 \cdot \alpha \end{cases}$$

$$\text{Contrat B} = \begin{cases} P = 250 \cdot \alpha \\ I = 1800 \cdot \alpha \end{cases}$$

En fonction des 2 contrats et des situations avec ou sans sinistre vous dresserez un tableau des niveau de la richesse de l'agent.

3 points

Pour les 2 contrats, vous établirez la proportion α qu'il compte assurer en fonction des 2 contrats de manière à maximiser son utilité ?

4 points

Question 4.3) Vous commenterez vos résultats en expliquant quelle situation il va choisir ?

2 points

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $N(0; 1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

| t | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |