1 Exercice taux de protection optimal

Question 3.1) Un particulier possède une maison de maître du $XVIII^{me}$ siècle rue Berbisey. La demeure est splendide, la poutraison à la française en bois massif est connue pour les risques incendies. Le bien immobilier a été évalué à 3 millions d'euros. Le déclenchement d'un incendie pourrait détruire les 2/3 de sa valeur. La probabilité d'un tel risque est de 10 %. On raisonne en K€, la richesse initiale représente donc 3000 K€. On précise que le futur assuré possède une fonction d'utilité de la forme suivante :

$$\mathbf{U(W) = ln(W)}$$

Afin d'éviter le pire, il décide d'assurer le bien. A cette fin, il contacte 2 assureurs. Voilà les contrats qui lui sont proposés :

$$\text{Contrat A} = \begin{cases} P = 200 \cdot \alpha \\ I = 1500 \cdot \alpha \end{cases}$$

$$\text{Contrat B} = \begin{cases} P = 250 \cdot \alpha \\ I = 1800 \cdot \alpha \end{cases}$$

En fonction des 2 contrats et des situations avec où sans sinistre vous dresserez un tableau des niveau de la richesse de l'agent.

3 points

Pour les 2 contrats, vous établirez la proportion α qu'il compte assurer en fonction des 2 contrats de manière à maximiser son utilité ?

4 points

Question 4.3) Vous commenterez vous résultats en expliquant quelle situation il va choisir ?

2 points

2 Correction exercice

Je crois me rappelé avoir corrigé l'énonce car avec celui que je vous avez présenté l'exercice était incohérent avec une $\alpha > 1$ Avec des primes des 200 et 250 α on retrouve des résultats cohérentes. J'avais été trop généreux avec mon assuré. Le résultat était mathématiquement juste mais l'énoncé était erroné. On corrige.
Pour réaliser ce travail, on décompose les situations avec et sans sinistre :
$W_1 = W_0 - P$ et $W_2 = W_0 - P - S + I$
On remplace par les valeurs de l'énonce corrigé. Pour le premier contrat
$W_1 = 3000 - 200 \cdot \alpha$ et $W_2 = 3000 - 200 \cdot \alpha - 2000 + 1500 \cdot \alpha$ On cherche à maximiser

la fonction d'utilité espérée :
$UE_1 = 0.1 \cdot ln\,(1000 + 1300 \cdot \alpha) + 0.9 \cdot ln\,(3000 - 300 \cdot \alpha + 1500 \cdot \alpha)$

Pour maximiser, on doit annuler la dérivée première :
$\frac{\partial UE_1}{\partial \alpha} = \frac{130.0}{1300 \cdot \alpha + 1000} - \frac{180.0}{3000 - 200 \cdot \alpha} = 0$ il vient : $\frac{130.0}{1300 \cdot \alpha + 1000} = \frac{180.0}{3000 - 200 \cdot \alpha}$
$130 \cdot 3000 + 130 \cdot (-200\alpha) = 180 \cdot 1300 \cdot \alpha + 180 \cdot 1000$
$390000 - 26000\alpha = 234000\alpha + 180000 \Rightarrow 390000 - 180000 = 234000\alpha + 26000\alpha$
$210000 = 260000\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{21}{26} = 0.807$
Le taux de protection optimal dans le cadre du premier contrat est de 80,7 %.

Pour le second contrat la fonction d'utilité espérée vaut :
$UE_2 = 0.1 \cdot ln\,(1000 - 250 \cdot \alpha + 1800 \cdot \alpha) + 0.9 \cdot ln\,(3000 - 250 \cdot \alpha)$
On dérive par rapport à la α :
$\frac{\partial UE_2}{\partial \alpha} = \frac{155.0}{1550 \cdot \alpha + 1000} - \frac{225.0}{3000 - 250 \cdot \alpha} = 0$ il vient : $\frac{155.0}{1550 \cdot \alpha + 1000} = \frac{225.0}{3000 - 250 \cdot \alpha}$
$155 \cdot 3000 - 155 \cdot 250\alpha = 225 \cdot 1550 \cdot \alpha + 225 \cdot 1000$
$465000 - 38750 \cdot \alpha = 348750 \cdot \alpha + 225000 \Rightarrow 465000 - 225000 = 38750 \cdot \alpha + 348750 \cdot \alpha$
$240000 = 387500\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{240}{387{,}5} = 0.6193$

Le taux de protection optimal dans le cadre du second contrat est de 61,9 %.

Compte tenu des éléments obtenus précédemment on peut établir le niveau de l'indemnité et le niveau de la prime dans les 2 contrats. Pour le premier contrat : 0.807*200= **161,4** pour le prime et 0.807*1500 = **1210,5**. Pour le second contrat : 0.6193 * 250 =**154,825** et des indemnités : 0.6193 * 1800 = **1114,74**.

On constate finalement que les contrats sont assez proches. Pour les distinguer, on va calculer les utilités obtenue à travers ces 2 contrats.

$UE_1 = 0.1 \cdot ln(3000 - 2000 - 161.4 + 1210.5) + 0.9 \cdot ln(3000 - 161,4) = 7.9184$
$UE_2 = 0.1 \cdot ln(3000 - 2000 - 154.825 + 1114.74) + 0.9 \cdot (3000 - 154.825) = 7.9161$

Comme on pouvait s'y attendre le contrat A est légèrement plus utile pour l'assuré. Si on rejoint une logique de placement, en, cas d'accident le placement de 200 rapporterait 1500 (7.5) alors que pour le second contrat 250 rapporte 1800 en cas de sinistre (7.2).