Examen assurance et gestion des risques

Mickaël Clévenot

13 avril 2015 - 2 heures

Questions de cours pour juristes et économistes

Question 1) A quoi sert l'axiomatique de Von Neumann Morgenstern ? **2 points**

Question 2) Qu'est-ce qu'un risque assurable ? **2 points**

Question 3) Quelles doivent être les caractéristiques juridiques d'un contrat d'assurance ? **2 points**

Question 4) Donnez l'équation et une explication littéraire du comportement d'un agent risquophobe ? **2 points**

Question 5) Caractéristiques et spécificités des assurances de personne ? **2 points**

Exercice 1 pour juristes et économistes

Exercice de tarification en assurance vie.

Une assurance propose un contrat d'assurance vie. Le client, un homme de 55 ans, souhaiterait recevoir dans 15 ans un capital de 200 000 euros si il est toujours en vie, avec une sortie unique, en capital.

Question 2.1) Calculer la probabilité de survie de l'assuré à partir de la table ci-dessous ? **0.5 point**

Question 2.2) Une prime unique est versée en début de contrat. Elle sera placée au taux de 3 %. Vous utiliserez le principe de la prime réciproque pour calculer la prime pure. Quel est son montant ? **1 point**

Question 2.3) Si 100 hommes ont contracté ce contrat, quel est le montant capitalisé par l'assurance ? **0.5 point**

Question 2.4) Si au bout des 15 années, seuls 80 ont survécu que ce passe-t-il pour l'assurance ? **0.5 point**

Question 2.5) Si ces hommes avaient été des femmes bien que l'assurance ai calculé la prime en fonction de la probabilité de survie des hommes que serait-il advenus des comptes de l'assurance ? **0.5 point**

Question 2.6) Avec la prime calculée pour les hommes appliquée aux femmes, quel aurait été le taux qui aurait permis à l'assurance de dégager un taux de chargement de 20% ? **2 points**

Table 1 – **Mortalité INSEE**

TABLEAU 68 - TABLE DE MORTALITÉ DES ANNÉES 2009 - 2011, données provisoires arrêtées à fin décembre 2012			
	Survivants S(x) à l'âge x		
Âge	Sexe masculin	Sexe féminin	Ensemble
x	S(x)	S(x)	S(x)
50	94 578	97 275	95 894
51	94 139	97 049	95 559
52	93 642	96 796	95 181
53	93 096	96 536	94 775
54	92 503	96 259	94 336
55	91 862	95 961	93 862
56	91 163	95 640	93 348
57	90 417	95 306	92 803
58	89 632	94 950	92 227
59	88 808	94 573	91 621
60	87 947	94 179	90 988
61	87 037	93 763	90 319
62	86 085	93 330	89 620
63	85 103	92 862	88 890
64	84 061	92 362	88 112
65	82 958	91 831	87 288
66	81 770	91 261	86 402
67	80 559	90 654	85 486
68	79 288	90 007	84 519
69	77 942	89 308	83 488
70	76 542	88 566	82 410
71	75 043	87 774	81 255
72	73 440	86 910	80 013
73	71 711	85 951	78 660
74	69 887	84 888	77 207
75	67 938	83 743	75 651
76	65 810	82 470	73 940
77	63 540	81 040	72 080
78	61 127	79 455	70 071
79	58 517	77 704	67 880
80	55 727	75 713	65 480
81	52 774	73 494	62 885
82	49 633	70 988	60 054
83	46 291	68 220	56 993
84	42 834	65 150	53 724
Champ : France métropolitaine, territoire au 31 décembre 2011			
Source : Insee, statistiques de l'état civil et estimations de population			

Exercice 2 pour les juristes <u>uniquement</u>

Application de la méthode de Markowitz.

Question 3.1) Vous rappellerez le principe qui guide la politique d'investissement selon Markowitz ?
1 point

Question 3.2) Un agent économique possède une maison sur la côté Bretonne dont la valeur est estimée à 300 000 euros. Avec le réchauffement climatique la probabilité d'inondation est estimée à 0.15, pour un montant de dégât équivalent au 2/3 de la valeur du bien. Vous calculerez la variance et l'espérance de richesse de ce bien sans assurance ?
1 point

Question 3.3) L'agent pour se prémunir de ce risque décide de prendre une assurance. L'assurance lui propose une assurance qui couvre 1/2 des dégâts moyennant une prime de 5000 euros. Vous calculerez l'espérance et la variance de la richesse immobilière de l'agent avec et sans assurance.
1 point

Question 3.4) L'agent pour tenter de réduire le montant de sa prime d'assurance décide de mettre en place un dispositif qui devrait permettre de réduire de moitié la probabilité d'occurrence du risque. Celui-ci coûte 500 euros. Dans ce cas, l'assurance veut bien accorder une réduction de la prime qui s'établirait alors à 2500 euros. Vous calculerez l'espérance et la variance de la richesse immobilière de l'agent dans ce cas.
1 point

Question 3.5) Vous établirez la meilleure situation au en fonction des critères de Markowitz ?
1 point

Exercice 3 Uniquement pour les économistes

Défintion du taux de protection optimal

Un particulier possède une maison de maître du $XVIII^{ème}$ siècle rue Berbisey. La demeure est splendide, la poutraison à la française en bois massif est connue pour les risques incendies. Le bien immobilier a été évalué à 3 millions d'euros. Le déclenchement d'un incendie pourrait détruire les 2/3 de sa valeur. La probabilité d'un tel risque est de 10 %. On raisonne en K€, la richesse initiale représente donc 3000 K€. On précise que le futur assuré possède une fonction d'utilité de la forme suivante :

$$\mathbf{U(W) = ln(W)}$$

Afin d'éviter le pire, il décide d'assurer le bien. A cette fin, il contacte son assureur qui lui propose le contrat suivant :

$$\text{Contrat A} = \begin{cases} P = 200 \cdot \alpha \\ I = 1500 \cdot \alpha \end{cases}$$

Question 4.1) Vous définirez théoriquement et en fonction des chiffres de l'exercice la valeur de la richesse de l'assuré en fonction des 2 états de nature, sinistre et absence de sinistre.

1 point

Question 4.2) Afin d'établir la proportion α qu'il compte assurer de manière à maximiser son utilité, vous dériverez l'utilité en fonction du taux de couverture ?

2 points

Question 4.3) Vous annulerez la dérivée première de façon à déterminer le niveau de α. Vous vérifierez également qu'il s'agit bien d'un maximum d'utilité en réalisant la dérivée seconde ?

2 points

Si il contact une seconde assurance :
$\text{Contrat B} = \begin{cases} P = 250 \cdot \alpha \\ I = 1800 \cdot \alpha \end{cases}$

c

Dans le cas du premier contrat l'utilité espérée de l'agent s'écrit ainsi :
$V_a = \pi \cdot u(W_1) + (1 - \pi) \cdot u(W_2)$
$V_a = 0.1 \cdot ln(1000 + 1300 \cdot \alpha) + 0.9 \cdot ln(3000 - 200 \cdot \alpha)$
$\frac{\partial V_a}{\partial \alpha} = \frac{0.1*1300}{1000+1300 \cdot \alpha} + 0.9 \cdot \frac{(-200)}{3000-200 \cdot \alpha} = 0$

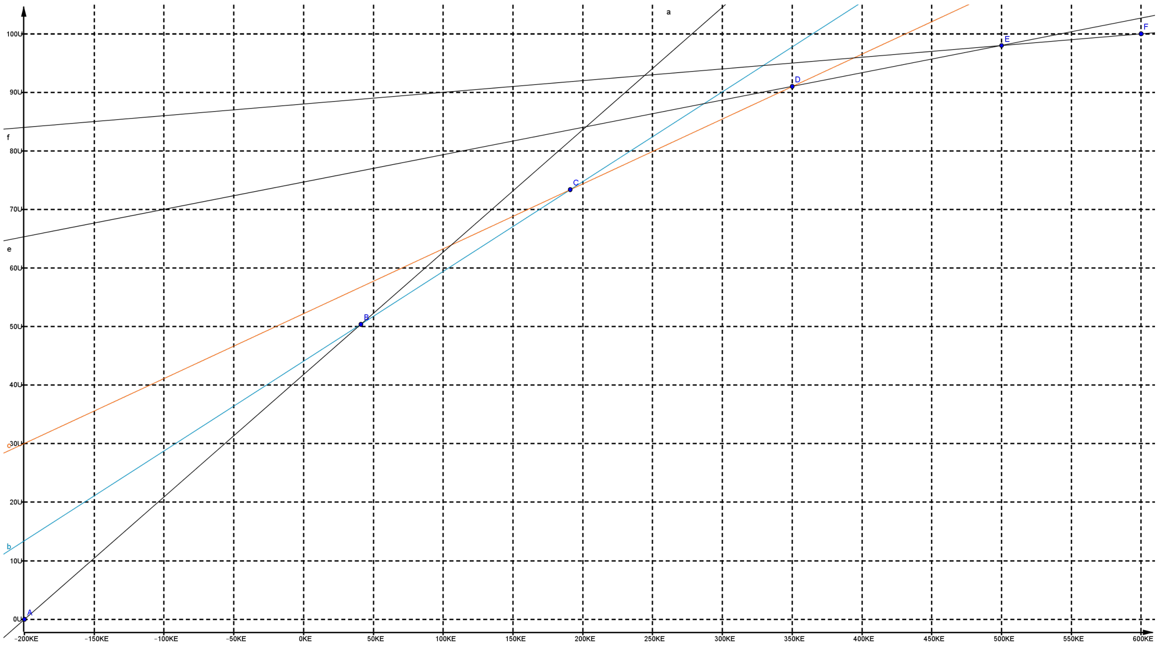

FIGURE 1 – Correction fonction VN-M

1 Correction

E2 Définition de l'équivalent certain. L'équivalent certain est le montant w^* sûr et certain qui procure la même utilité que la richesse finale risquée (c-à-d la richesse initiale w_0 et la loterie $\tilde{x}$)

En équation cela donne :

$$\boxed{u(w^*) = Eu(\tilde{w_f}) = Eu(w_0 + \tilde{x})} \tag{1}$$

La richesse initiale vaut : $w_0 = 1000$

La loterie $\tilde{x} = L(2000, 0; {}^1\!/\!{}_2, {}^1\!/\!{}_2)$ On veut que l'utilité procurer par le montant de l'équivalent certain soit égale à l'utilité procure par le montant de richesse procurée par la richesse finale aléatoire.

$u(w^*) = Eu(\tilde{w_f}) = Eu(w_0+\tilde{x})$ Ln(w*) $= {}^1\!/\!{}_2 \cdot Ln(10000+2000) + {}^1\!/\!{}_2 Ln(10000) = 9.3$

$$\Rightarrow w^* = e^{9.3} = 10954,45$$

E3 Prix de vente et d'achat du risque

Le prix de vente de la loterie p_v est obtenu par la différence entre le montant de l'équivalent certain w^* et le montant de la richesse initiale w_0. Renoncer à la loterie revient à se priver de $(w^* - w_0)$. On la vue dans l'exercice précédant la valeur de l'équivalent certain est de 10954,45 la richesse initiale de 10 000, donc le prix de vente du billet est de 954.45 euros.

Dans le cas d'une fonction d'utilité puissance 2, il est nécessaire de recalculer le montant de l'équivalent certain.

$u(w^*) = 1/2 \cdot (10000 + 2000)^2 + 1/2 \cdot (10000)^2 = 122000000$

$$\Rightarrow w^* = \sqrt{122000000} = 11045,36$$

Le prix de vente de la loterie vaut donc $(w^* - w_0)$: $11045,36 - 10000 = 1045,36$

Dans le cas d'une fonction d'utilité racine carrée, il est nécessaire de recalculer le montant de l'équivalent certain.
$u(w^*) = 1/2 \cdot (10000 + 2000)^{(1/2)} + 1/2 \cdot (10000)^{(1/2)} = 104,77$

$$\Rightarrow w^* = 104,77^2 = 10977,22$$

Le prix de vente de la loterie vaut donc $(w^* - w_0)$: $10977,22 - 10000 = 977,22$

Le prix d'achat des loteries :
L'agent achètera le billet si et seulement si l'utilité procurée par le montant de l'équivalent certain est supérieur ou égal à l'utilité procurer par sa richesse initiale. Le billet vaut 10 euros, sa richesse initiale est de 10 000 et la probabilité de gagner est de $1/10000$ le gain est de 80 000 euros.

L'équivalent certain vaudra :
$u(w^*) = Eu(\tilde{w}_f) = Eu(w_0 + \tilde{x})$
$u(w^*) = (1/10000) \cdot Ln(10000 - 10 + 80000) + (1 - 1/10000) \cdot Ln(10000 - 10) = 10095,31$
$u(w^*) = (1/10000) \cdot Ln(89990) + (1 - 1/10000) \cdot Ln(9990) = 9992,19 euros$

Comme l'équivalent certain est inférieur à sa richesse initiale, il n'achètera pas le billet.
Prime de risque
La prime correspond un montant qu'est prêt à payer un agent adverse au risque pour limiter ce risque. Analytiquement, la prime de risque correspond au montant qui va équilibrée l'utilité de la richesse finale aléatoire à la richesse finale certaine moins cette prime de risque. Dit autrement, l'utilité procuré par le montant de richesse certaines moins la prime de risque doit être juste égale à l'utilité de la richesse finale aléatoire. On peut également noté qu'un agent adverse au risque aura une prime de risque positive alors que l'assurance dans le cadre de ce cours est supposée être neutre au risque. On peut considérer que les marchés financiers constituent un marché du risque sans lesquels le fonction d'assurance aurait plus de difficulté à être réalisés car ils jouent le rôle de contrepartie avec une attitude au risque spécifique. Ils sont risquophiles.
Définition formelle :
$U(\bar{x} - P) = Eu(U(\tilde{x}))$